РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт системного программирования
Российской академии наук

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор ИСП РАН
академик РАН,
д.ф.-м.н., профессор
______________ В.П.Иванников
«___»__________________ 2012 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА

УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ
«Математическая логика:
аксиоматические теории и алгебраические системы»

для подготовки аспирантов по специальности
05.13.11 - Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей

Москва 2012

1. Аннотация

Курс состоит из следующих разделов:

- теория логического вывода на примерах классического исчисления высказываний и исчисления предикатов,
- аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля, кардинальные и ординальные числа,
- формальная арифметика Пеано, результаты Геделя.
- аксиоматизация алгебры и геометрии.

2. Цели и задачи курса

Цель учебного курса – ознакомить аспирантов, специализирующихся в области прикладной математики и информатики, с современным представлением об устройстве математических теорий, с наиболее важными аксиоматическими теориями современной математики и соответствующими этим теориям алгебраическим системам.

3. Место курса в структуре послевузовского профессионального образования (аспирантура)

Курс «Математическая логика: аксиоматические теории и алгебраические системы» относится к факультативным дисциплинам учебного плана подготовки аспирантов по научной специальности 05.13.11 «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей».

Для успешного изучения курса аспиранту необходимо иметь представление о классической логике предикатов первого порядка, аппарате логического вывода, а также знать общесистемное программное обеспечение, уметь работать с персональной ЭВМ.

Получаемые в рамках курса знания могут быть востребованы при подготовке к кандидатскому экзамену по научной специальности 05.13.11 «Математическое и программное обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей», в научно-исследовательской работе и при выполнении диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук.

4. Требования к результатам освоения курса

В результате изучения курса «Математическая логика: аксиоматические теории и алгебраические системы» аспирант должен:

Знать

- основные понятия и свойства логико-математических теорий;
- основные свойства формального вывода
- классическое исчисление высказываний и предикатов;
- аксиоматизацию алгебры и геометрии.

Уметь

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач математической логики;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов.

Владеть

- навыками освоения большого объема информации и решения задач математической логик;
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;

- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач; предметным языком математической логики и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов..

5. Содержание и структура курса

Курс состоит из трех частей, в которых излагаются основные концепции математической логики и теории множеств: формальные логические системы, аксиоматические теории и сопутствующие им алгебраические системы, основания теории множеств.

5.1 Содержание разделов курса

№	Наименование раздела	Содержание раздела	Форма текущего контроля
1	Основные понятия и свойства логико-математических теорий	Основные понятия и свойства логико-математических теорий (сигнатура, синтаксис, аксиоматика, формальный вывод, теорема, непротиворечивость, корректность, полнота аксиоматических теорий). Основные свойства формального вывода (транзитивность, монотонность, компактность).	Т
2	Классическое исчисление высказываний. Аксиоматика, непротиворечи-вость, полнота. Теорема Генкина.	Классическое исчисление высказываний (КИВ). Сигнатура КИВ. Аксиомы и правила вывода КИВ. Непротиворечивость КИВ. Терема дедукции. Применение теоремы дедукции для вывода формул КИВ. Интерпретации классической логики предикатов. Пропозициональные модели. Корректность КИВ. Непротиворечивые теории высказываний. Лемма о непротиворечивом расширении пропозициональных теорий. Максимальные (насыщенные) пропозициональные теории. Лемма Линденбаума. Теорема Генкина. Теорема полноты КИВ. Теорема компактности.	Т

3	Классическое исчисление предикатов. Аксиоматика, теорема дедукции, непротиворечи-вость, полнота	Сигнатура классической логики предикатов первого порядка (КЛП), термы, формулы. Алгебраическая интерпретация первого порядка. Значение термов и формул в интерпретации. Выполнимые и общезначимые формулы. Модель. Логическое следствие. Теорема о логическом следствии. Классическое исчисление первого порядка (КИП). Аксиоматика, логический вывод в КИП. Непротиворечивость КИП. Теорема дедукции для КИП. Проблема общезначимости в КЛП. Примеры общезначимых формул. Леммы о вспомогательных константах. Лемма о непротиворечивых расширениях теорий первого порядка. Максимальные (насыщенные) теории первого порядка. Эрбрановские интерпретации. Экзистенциально замкнутые теории первого порядка. Лемма об экзистенциальном замыкании теорий. Теорема Генкина о непротиворечивых теориях первого порядка. Теорема о полноте КИВ. Теорема компактности. Теорема Левенгейма- Скулема.	Т
4	Исчисление предикатов с равенством. Теории порядков. Теории групп, колец и полей.	Аксиоматический принцип устройства математики. Основные свойства формальных аксиоматических теорий (непротиворечивость, полнота, категоричность, разрешимость). Теорема Лося-Воота. Примеры теорий первого порядка. Теория равенства. Теории порядка. Теории порядка. Теории групп, колец, полей.	Т
5	Формальная арифметика. Геделева нумерация. Арифметические предикаты. Теорема Геделя о неполноте.	Аксиомы формальной арифметики. Отношения и функции, выразимые в формальной арифметике. Проблема непротиворечивости формальной арифметики. Нумерация Геделя символьных конструкций. Предикат доказуемости. Теорема Геделя о неполноте формальной арифметики.	Т
6	Аксиоматизация геометрии	Аксиоматическое устройство геометрии. Аксиомы геометрии Тарского.	Т
7	Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля.	Аксиомы теории множеств. Представление аксиом теории множеств при помощи формул КЛП	Т
8	Отношение равномощности. Арифметика кардинальных чисел.	Отношение равномощности множеств. Теорема Кантора-Бернштейна-Шредера. Теорема Кантора. Кардинальные числа. Сложение, умножение и возведение в степень кардинальных чисел. Законы арифметики кардинальных чисел. Сравнение кардинальных чисел.	Т
9	Порядковые типы и операции над	Отношения порядка (квазипорядок, частичный порядок, линейный порядок, плотный порядок).	Т

	ними. Вполне упорядоченные множества. Принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора и ее следствия. Арифметика ординальных чисел	Порядковые типы. Умножение, сложение и инвертирование порядковых типов. Ассоциативность сложения и умножения порядковых типов. Законы арифметики порядковых типов. Фундированный порядок. Вполне упорядоченные множества. Характеристические свойства вполне упорядоченных множеств. Лемма о монотонном отображении вполне упорядоченного множества в себя. Теорема о трихотомии вполне упорядоченных множеств. Аксиома выбора и ее следствия. Теорема Цермело о полном упорядочении множества. Теорема о трихотомии для кардинальных чисел. Лемма Цорна. Принцип максимума Хаусдорфа. Порядковые числа (ординалы). Сложение и умножение ординалов. Законы арифметики ординалов. Пример Гудштейна.	
10	Интуиционистская логика	Интуиционистская логика высказываний. Интерпретация интуиционистской логики (модели Крипке). Примеры необщезначимых формул интуиционистской логики	Т

5.2 Структура курса

Общая трудоемкость курса составляет 2 зачетные единицы (72 часа).

Вид работы	Трудоемкость, часов
	1 курс
Общая трудоемкость	**72**
Аудиторная работа:	**32**
Лекции (Л)	32
Практические занятия (ПЗ)	-
Лабораторные работы (ЛР)	-
Самостоятельная работа:	**40**
Самостоятельное изучение разделов	-
Самоподготовка (проработка и повторение лекционного материала и материала учебников и учебных пособий, выполнение практических заданий)	40
Вид итогового контроля (зачет, экзамен)	**Кандидатский экзамен**

Трудоемкость отдельных разделов курса.

№	Наименование разделов	Количество часов				
		Всего	Аудиторная работа			Вне-ауд. работа СР
			Л	ПЗ	ЛР	

1	Основные понятия и свойства логико-математических теорий. Основные свойства формального вывода.	4	2	-	-	2
2	Классическое исчисление высказываний. Аксиоматика, непротиворечивость, полнота. Теорема Генкина	10	4	-	-	6
3	Классическое исчисление предикатов. Аксиоматика, теорема дедукции, непротиворечивость, полнота	10	4	-	-	6
4	Исчисление предикатов с равенством. Теории порядков. Теории групп, колец и полей.	8	2	-	-	4
5	Формальная арифметика. Геделева нумерация. Арифметические предикаты. Теорема Геделя о неполноте.	8	4			4
6	Аксиоматизация геометрии	4	2			2
7	Аксиоматическая теория множеств Цермело-Френкеля.	4	2			2
8	Отношение равномощности. Арифметика кардинальных чисел.	8	4			4
9	Порядковые типы и операции над ними. Вполне упорядоченные множества. Принцип трансфинитной индукции. Аксиома выбора и ее следствия. Арифметика ординальных чисел	14	6			8
10	Интуиционистская логика	4	2			2
	Итого:	72	32	-	-	40

6. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов

Форма контроля знаний:
- кандидатский экзамен по специальности.

Контрольно-измерительные материалы

На кандидатском экзамене аспирант должен продемонстрировать знания в объеме основной программы кандидатского экзамена по специальности 05.13.11 «Математическое обеспечение вычислительных машин, комплексов и компьютерных сетей», а также дополнительной программы, в которую, в зависимости от выбранной аспирантом специализации, могут входить вопросы, рассматриваемые в данном курсе.

Перечень контрольных вопросов для дополнительной программы:

1. Основные понятия и свойства логико-математических теорий (сигнатура, синтаксис, аксиоматика, формальный вывод, теорема, непротиворечивость, корректность, полнота аксиоматических теорий). Основные свойства формального вывода (транзитивность, монотонность, компактность).
2. Классическое исчисление высказываний (КИВ). Сигнатура КИВ. Аксиомы и правила вывода КИВ.
3. Непротиворечивость КИВ.

4. Терема дедукции. Применение теоремы дедукции для вывода формул КИВ.
5. Интерпретации классической логики предикатов. Пропозициональные модели. Корректность КИВ.
6. Непротиворечивые теории высказываний. Лемма о непротиворечивом расширении пропозициональных теорий.
7. Максимальные (насыщенные) пропозициональные теории. Лемма Линденбаума.
8. Теорема Генкина.
9. Теорема полноты КИВ. Теорема компактности.
10. Интуиционистская логика высказываний. Интерпретация интуиционистской логики (модели Крипке). Примеры необщезначимых формул интуиционистской логики.
11. Сигнатура классической логики предикатов первого порядка (КЛП), термы, формулы. Алгебраическая интерпретация первого порядка. Значение термов и формул в интерпретации. Выполнимые и общезначимые формулы. Модель. Логическое следствие. Теорема о логическом следствии.
12. Классическое исчисление первого порядка (КИП). Аксиоматика, логический вывод в КИП. Непротиворечивость КИП.
13. Теорема дедукции для КИП.
14. Проблема общезначимости в КЛП. Примеры общезначимых формул.
15. Леммы о вспомогательных константах. Лемма о непротиворечивых расширениях теорий первого порядка. Максимальные (насыщенные) теории первого порядка. Эрбрановские интерпретации.
16. Экзистенциально замкнутые теории первого порядка. Лемма об экзистенциальном замыкании теорий.
17. Теорема Генкина о непротиворечивых теориях первого порядка. Теорема о полноте КИВ. Теорема компактности. Теорема Левенгейма- Скулема.
18. Примеры теорий первого порядка. Теория равенства. Теории порядка.
19. Аксиомы теории множеств. Представление аксиом теории множеств при помощи формул КЛП
20. Отношение равномощности множеств. Теорема Кантора-Бернштейна-Шредера. Теорема Кантора.
21. Кардинальные числа. Сложение, умножение и возведение в степень кардинальных чисел. Законы арифметики кардинальных чисел. Сравнение кардинальных чисел.
22. Отношения порядка (квазипорядок, частичный порядок, линейный порядок, плотный порядок).
23. Порядковые типы. Умножение, сложение и инвертирование порядковых типов. Ассоциативность сложения и умножения порядковых типов. Законы арифметики порядковых типов.
24. Фундированный порядок. Вполне упорядоченные множества. Характеристические свойства вполне упорядоченных множеств.
25. Лемма о монотонном отображении вполне упорядоченного множества в себя. Теорема о трихотомии вполне упорядоченных множеств.
26. Аксиома выбора и ее следствия. Теорема Цермело о полном упорядочении множества. Теорема о трихотомии для кардинальных чисел. Лемма Цорна. Принцип максимума Хаусдорфа.
27. Порядковые числа (ординалы). Сложение и умножение ординалов. Законы арифметики ординалов. Пример Гудштейна.
28. Аксиомы формальной арифметики. Отношения и функции, выразимые в формальной арифметике. Проблема непротиворечивости формальной арифметики.
29. Нумерация Геделя символьных конструкций. Предикат доказуемости.
30. Теорема Геделя о неполноте формальной арифметики.

31. Аксиоматический принцип устройства математики. Основные свойства формальных аксиоматических теорий (непротиворечивость, полнота, категоричность, разрешимость). Теорема Лося-Воота.
32. Теории порядка.
33. Теории групп, колец, полей.
34. Аксиоматическое устройство геометрии.

7. Список литературы

1. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.:Наука, 1984.
2. Клини С. Математическая логика. М.:Мир, 1973, 480 с.
3. Н.К.Верещагин, А.Шень. Начала теории множеств, Москва, МЦНМО, 1999, 126 с.
4. Н.К.Верещагин, А.Шень. Языки и исчисления, Москва, МЦНМО, 2000, 286 с.
5. И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, Москва, Наука, 1995, 255 с.
6. Френкель А., Бар-Хилел И., Основания теории множеств, М.:Мир, 1976.

8. Материально-техническое обеспечение курса

Для получения необходимой информации и самостоятельной работы аспирантов используются web-ресурсы Интернет и локальная библиотека электронных материалов.
В компьютерных классах ИСП РАН (ауд. 109) аспиранты могут самостоятельно ознакомиться с программным обеспечением, используемым для верификации моделей программ.

Программу составил д.ф.–м.н. Захаров В.А.

Программа принята на заседании Ученого Совета ИСП РАН
протокол № 2012-5 от 23 мая 2012 г.